

Egy ellipszis - feladat

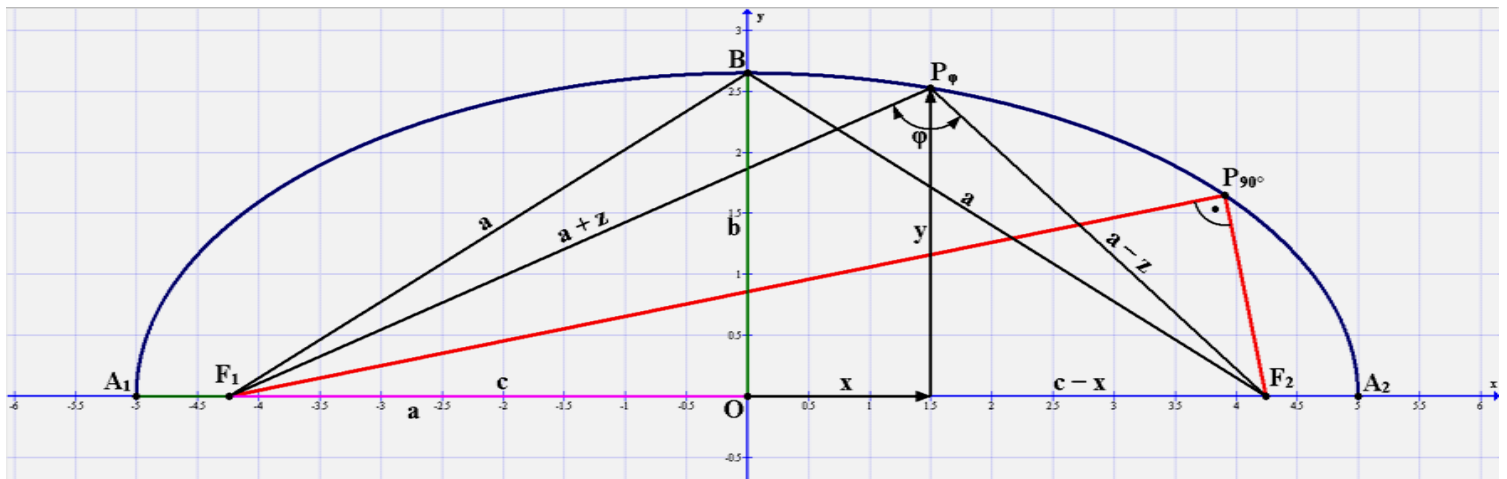
Az [1] írást nézegetve eszünkbe jutott az alábbi feladat, mely *) folytatása is lehet.

A feladat

Határozzuk meg, hogy az ellipszis egy P pontját az F_1 és F_2 fókuszaival összekötő sugarak – a vezérsugarak – által bezárt φ szög mely esetekben lehet derékszög!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Koszinusztétellel:

$$(2 \cdot c)^2 = (a + z)^2 + (a - z)^2 - 2 \cdot (a + z) \cdot (a - z) \cdot \cos \varphi . \quad (1)$$

Most az e numerikus excentricitással:

$$c = e \cdot a . \quad (2)$$

Majd az 1. ábráról Pitagorász tételével, (2) - vel is:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - e^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot (1 - e^2) \rightarrow b = a \cdot \sqrt{1 - e^2} . \quad (3)$$

A z mennyiséghez ismét Pitagorász tételével:

$$y^2 = (a + z)^2 - (c + x)^2 , \quad (4 / 1)$$

$$y^2 = (a - z)^2 - (c - x)^2 . \quad (4 / 2)$$

A (4) egyenletek különbségét képezve, majd (2) - vel is:

$$\begin{aligned}
 y^2 - y^2 &= (a + z)^2 - (c + x)^2 - [(a - z)^2 - (c - x)^2] \rightarrow \\
 0 &= [(a + z)^2 - (a - z)^2] - [(c + x)^2 - (c - x)^2] \rightarrow \\
 0 &= [a^2 + 2 \cdot a \cdot z + z^2 - (a^2 - 2 \cdot a \cdot z + z^2)] - [c^2 + 2 \cdot c \cdot x + x^2 - (c^2 - 2 \cdot c \cdot x + x^2)] \rightarrow \\
 0 &= 4 \cdot a \cdot z - 4 \cdot c \cdot x \rightarrow a \cdot z = c \cdot x \rightarrow z = \frac{c}{a} \cdot x \rightarrow \underline{z(x) = e \cdot x} . \quad (5)
 \end{aligned}$$

Ezután (1), (2) és (5) - tel:

$$\begin{aligned}
 (2 \cdot e \cdot a)^2 &= (a + e \cdot x)^2 + (a - e \cdot x)^2 - 2 \cdot (a + e \cdot x) \cdot (a - e \cdot x) \cdot \cos \varphi \rightarrow \\
 (2 \cdot e \cdot a)^2 &= (a^2 + 2 \cdot e \cdot a \cdot x + e^2 \cdot x^2) + (a^2 - 2 \cdot e \cdot a \cdot x + e^2 \cdot x^2) - \\
 &\quad - 2 \cdot (a + e \cdot x) \cdot (a - e \cdot x) \cdot \cos \varphi \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$4 \cdot e^2 \cdot a^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot e^2 \cdot x^2 - 2 \cdot (a^2 - e^2 \cdot x^2) \cdot \cos \varphi \rightarrow$$

$$2 \cdot e^2 \cdot a^2 = a^2 + e^2 \cdot x^2 - (a^2 - e^2 \cdot x^2) \cdot \cos \varphi \rightarrow$$

$$(a^2 - e^2 \cdot x^2) \cdot \cos \varphi = a^2 \cdot (1 - 2 \cdot e^2) + e^2 \cdot x^2 \rightarrow$$

$$\cos \varphi = \frac{a^2 \cdot (1 - 2 \cdot e^2) + e^2 \cdot x^2}{a^2 - e^2 \cdot x^2} , \quad (6)$$

$$\underline{\varphi(x) = \arccos \left[\frac{a^2 \cdot (1 - 2 \cdot e^2) + e^2 \cdot x^2}{a^2 - e^2 \cdot x^2} \right]} . \quad (7)$$

Most (6) - ből:

$$\cos(\varphi = 90^\circ) = 0 = \frac{a^2 \cdot (1 - 2 \cdot e^2) + e^2 \cdot x_0^2}{a^2 - e^2 \cdot x_0^2} \rightarrow a^2 \cdot (1 - 2 \cdot e^2) + e^2 \cdot x_0^2 = 0 \rightarrow$$

$$x_0^2 = \frac{(2 \cdot e^2 - 1) \cdot a^2}{e^2} = a^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{e^2} \right) \rightarrow \underline{\underline{x_0 = \pm \sqrt{2 - \frac{1}{e^2}} \cdot a}} . \quad (8)$$

Mint hogy itt a négyzetgyök jele alatt csak nemnegatív szám állhat, így (8) - ből:

$$2 - \frac{1}{e^2} \geq 0 \rightarrow 2 \geq \frac{1}{e^2} \rightarrow e^2 \geq \frac{1}{2} \rightarrow \underline{e \geq \frac{1}{\sqrt{2}}} . \quad (9)$$

Továbbá az ellipszis kanonikus egyenletével:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow (3) \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} = 1 \rightarrow \underline{0 \leq e < 1} . \quad (10)$$

Majd a feltételünknek megfelelő ellipszisek excentricitásaira (9) és (10) - zel:

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \leq e < 1}} . \quad (11)$$

Kitűzött feladatunk megoldását a (8) és (11) képletek adják.

A képletek alkalmazását / az eljárásmodot egy számpéldán mutatjuk be.

SZÁMPÉLDA

Adott:

$$a = 5 \text{ cm} ; \frac{1}{\sqrt{2}} < e = \frac{1,2}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 . \quad (A)$$

Keresett: x_0 .

1. Megoldás

A megoldások (8) és (A) szerint:

$$x_0 = \pm \sqrt{2 - \frac{1}{e^2}} \cdot a = \pm \sqrt{2 - \frac{2}{1,2^2}} \cdot 5 \text{ cm} = \pm 3,9086798 \text{ cm} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{x_0 = \pm 3,909 \text{ cm}}} . \quad (a)$$

Az (a) eredmény kettős előjelének megfelelően az ellipszisen **4** darab olyan P_{90° pont van, melyekhez vezető sugarak derékszöget zárnak be egymással.

2. Megoldás

Most (7) és (A) - val:

$$\varphi(x) = \arccos \left[\frac{a^2 \cdot (1 - 2 \cdot e^2) + e^2 \cdot x^2}{a^2 - e^2 \cdot x^2} \right] = \arccos \left[\frac{5^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1,2^2}{2}\right) + \frac{1,2^2}{2} \cdot x^2}{5^2 - \frac{1,2^2}{2} \cdot x^2} \right] , \quad (b)$$

majd keressük a (b) függvénynek a $\varphi = 90^\circ$ egyenessel adódó metszéspontjait.

A grafikus megoldás első felét a 2. ábra mutatja.

Az ábra bal alsó sarkából leolvashatóan:

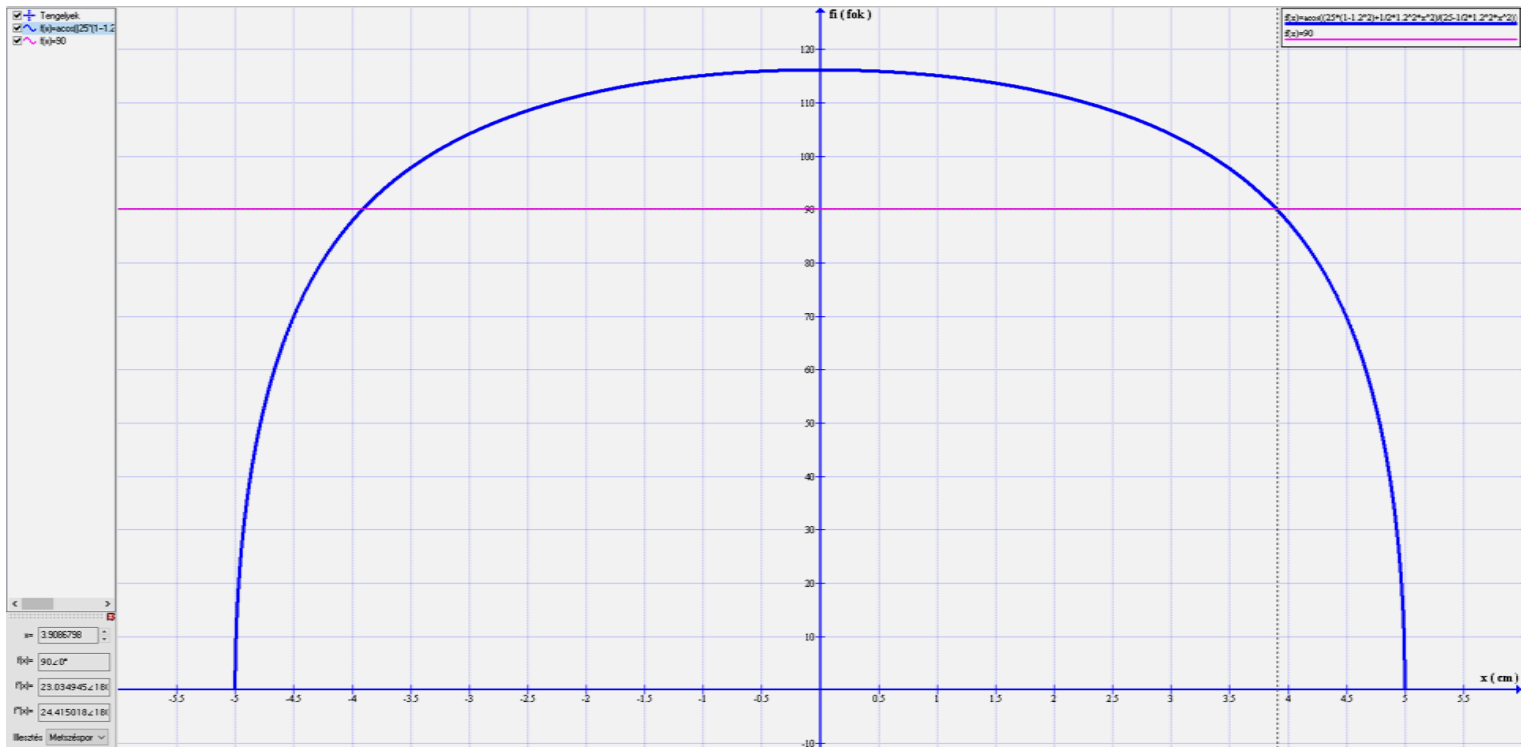
$$\underline{\underline{x_0 = 3,9086798 \text{ cm}}} , \quad (c)$$

egyezésben (a) - val. A 2. megoldás az 1. megoldás tükörképe az y tengelyre.

.....

A két megoldási mód közti választás ízlés dolga.

Javasoljuk, hogy mindig többféleképpen oldjuk meg feladatainkat, hacsak lehetséges ez.



2. ábra

Megjegyzések:

M1. Az [1] -ből kölcsönzött z - vel való munka itt is sikeresen alakult.

M2. A (7) képlet már önmagában is hasznos lehet, mert a és e ismeretében megadja a P ellipszis - ponthoz vezető sugarak közbezárt szögét a P pont x koordinátájának függvé - nyében.

M3. Az 1. ábrán a pirossal berajzolt sugarak zárják be a derékszöget, a számpélda adatai - nak megfelelően.

M4. Az 1. ábra megoldás - pontjai egymás tükörképei az y - , illetve az x tengelyre, ezért csak egyet rajzoltunk meg ezek közül.

M5. A z mennyiség bevezetését és fenti alkalmazását az teszi lehetővé, hogy az ellipszis mértani - helyes definíciója szerint – ahol r_1 és r_2 a vezérsugarak, továbbá $a = konst.$ – :

$$r_1 + r_2 = (a + z) + (a - z) = 2 \cdot a . \quad (12)$$

Most (5) - tel is:

$$r_1(x) = a + z(x) = a + e \cdot x, \quad r_2(x) = a - z(x) = a - e \cdot x. \quad (13)$$

Az 1. ábra piros vonalaihoz tartozó z^* érték:

$$z^* = e \cdot x_0 = \frac{1,2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \frac{2}{1,2^2}} \cdot 5 \text{ cm} = 3,3166 \text{ cm}, \text{ azaz:}$$

$$z^* = 3,3166 \text{ cm}. \quad (d)$$

Ezzel:

$$r_1^* = a + z^* = (5 + 3,3166) \text{ cm} = 8,3166 \text{ cm}, \quad (e1)$$

$$r_2^* = a - z^* = (5 - 3,3166) \text{ cm} = 1,6834 \text{ cm}. \quad (e2)$$

Ellenőrzés:

$$(r_1^*)^2 + (r_2^*)^2 = (2 \cdot c)^2 = (2 \cdot e \cdot a)^2 = \left(2 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{2}} \cdot 5\right)^2 (\text{cm}^2) = \frac{12^2}{2} (\text{cm}^2) = 72 (\text{cm}^2);$$

$$(r_1^*)^2 + (r_2^*)^2 = [(8,3166)^2 + (1,6834)^2] (\text{cm}^2) = 71,9997 (\text{cm}^2) \approx 72 (\text{cm}^2),$$

tehát jó.

M6. Feladatunkat így is megfogalmazhatjuk:

Meghatározandók az ellipszis azon pontjai, melyekből a két fókusz összekötő szakasz derékszögben látszik.

M7. Feladatunk egy további változata lehet az alábbi.

Igazoljuk, hogy egy ellipszisnek lehetnek olyan pontjai, melyekből a fókuszokat összekötő szakasz derékszögben látszik!

A létezés igazolását és annak feltételét egyaránt a (11) reláció adja meg.

Némiképpen meglepő lehet ezen e - tartomány viszonylag kis szélessége.

M8. Itt nem gondolunk a Pitagorász tételhez való hasonlóságra, mert ott a görbe egy pontjából – ami nem a körátmérő valamelyik végpontja – az egész átmérő – tehát a görbe két, egymástól legtávolabb elhelyezkedő pontja – látszik derékszögben. Itt a derékszögben látszó szakasz F_1, F_2 végpontjai nem is a görbe pontjai.

M9. Az 1. és a 2. ábráról is leolvasható, hogy a φ szög legnagyobb értékét $x = 0$ - nál veszi fel. Ennek nagysága (7) -ből:

$$\varphi_{\max} = \varphi(x = 0) = \arccos(1 - 2 \cdot e^2). \quad (14)$$

Most (A) és (14) szerint az 1. ábra esetében: $\varphi_{\max} \approx 116,1^\circ. \quad (f)$

Hasonlóan könnyű belátni (7) -ből, hogy:

$$\varphi_{min} = \varphi(x = \pm a) = \arccos(1) = 0^\circ . \quad (15)$$

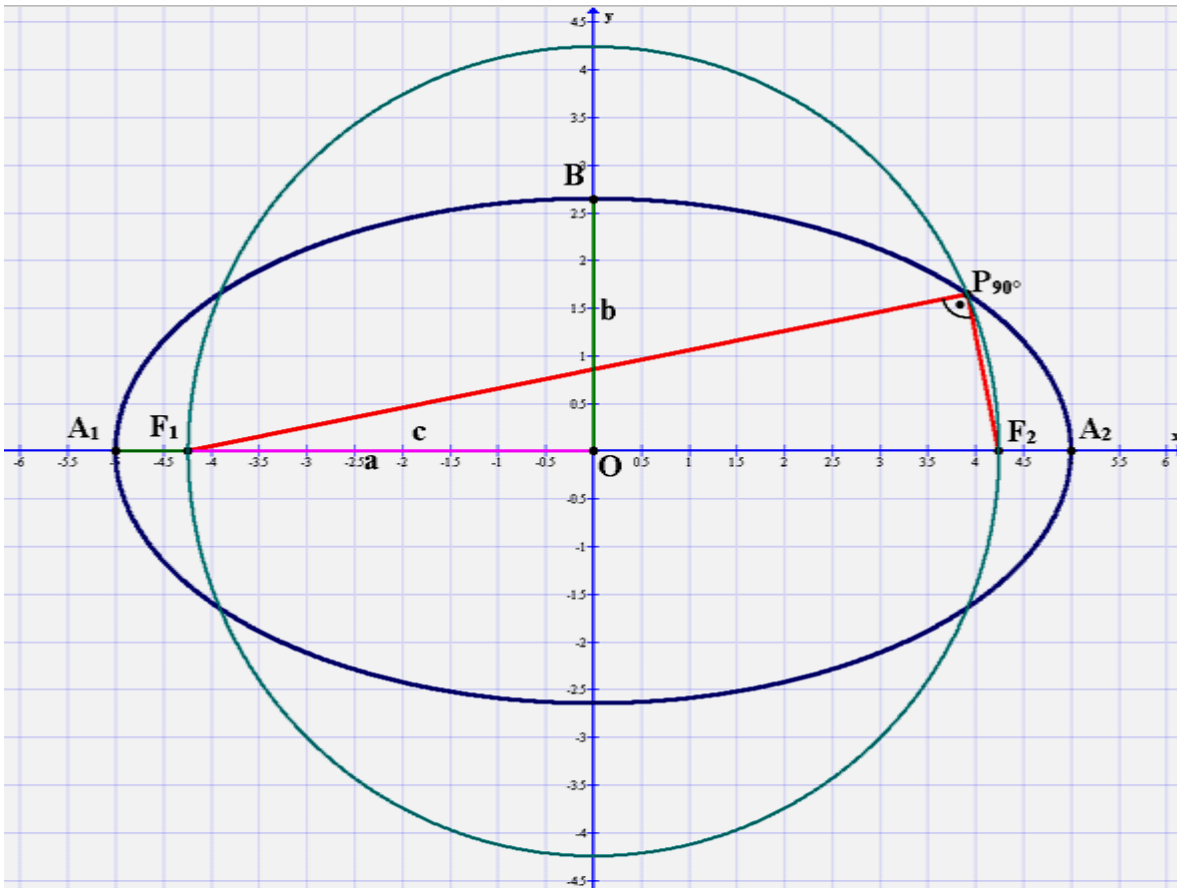
M10. A keresett pont y_0 koordinátáját az ellipszis kanonikus egyenletéből kaphatjuk meg, (3) és (8) - cal is:

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} &= 1 \rightarrow y_0^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \left[1 - \frac{a^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{e^2}\right)}{a^2}\right] = \\ &= a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \left[1 - \left(2 - \frac{1}{e^2}\right)\right] = a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1\right) = \\ &= a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \frac{1 - e^2}{e^2} = \frac{a^2}{e^2} \cdot (1 - e^2)^2 \rightarrow \\ \underline{\underline{y_0 = \pm \frac{a}{e} \cdot (1 - e^2) .}} \quad (16) \end{aligned}$$

A számpélda adataival:

$$\underline{\underline{y_0 = \pm 1,649915823 \text{ cm} .}} \quad (g)$$

M11. Úgymond szerkesztéses megoldást mutat az eredeti feladatra a 3. ábra, ahol *Thalész* tételét alkalmaztuk. Itt együtt látjuk mind a négy megoldást.



3. ábra

Úgy tűnik, hogy ez a legegyszerűbb megoldás; főleg akkor, ha beérjük a hagyományos, azaz nem számítógépi szerkesztéssel elérhető pontossággal.

Megemlítjük, hogy az ellipszis és a Thalész - kör metszéspontjainak számítása is (8) és (16) - ra vezet. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó végezze el ezt a számítást is!

M12. Természetesen a látókörs – akkor már nem Thalész - körs – megoldás nem csak derékszög esetében alkalmazható. Az ennek megfelelő számításos megoldás ismét (6) - ből indulna, azt x_0 - ra megoldva. Az eredmény:

$$x_0 = \pm \frac{a}{e} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e^2 - (1 - \cos \varphi)}{1 + \cos \varphi}} . \quad (17)$$

A (17) eredmény $\varphi = 90^\circ$ esetén átmegy (8) - ba.

A (17) szerinti x_0 - hoz tartozó y_0 koordináták ismét az ellipszis kanonikus egyenletéből adódnak.

M13. Időnként eltértünk az eredeti feladattól, az általánosabb eset felé. Így megy ez.

Meglepődtünk azon, hogy az előálló képletek / számítások viszonylag egyszerűnek adódtak. Gyanítjuk, hogy ez a z - mennyiség bevezetésének is köszönhető. Lehet, hogy a múltban már összefutottunk – legalább egyszer –, de örültünk, amikor [1] - ben újra találkoztunk vele, nem is olyan régen.

M14. Érdemes gyakorolni az alábbi elnevezéseket, mert viszonylag ritkán kerülnek elő:

~ c : lineáris excentricitás;

~ $e = c / a$: numerikus excentricitás.

M15. A 3. ábra kapcsán említettük a szerkesztéssel elérhető pontosságot. Erről már több helyen leírtuk, hogy – véleményünk szerint – egy adott személy a különböző, körzővel és vonalzóval végzett szerkesztések során kb. ugyanolyan pontossággal, ill. pontatlansággal dolgozik. Ezt a legegyszerűbb szakaszhosszban szemléltetni. Van, akinél ez pl. 0,1 mm; van, akinél 1 mm, ugyanazon – kicsit összetettebb – esetben. Most képzeljük el, hogy a szerkesztést két, különböző méretarányú / léptékű rajzon, pl. térképen kell végezni! Ha a térkép méretaránya $M = 1:1000$, akkor 1 mm rajzi hiba az eredmény valódi hosszában 1000 mm = 1 m. Ha a térkép méretaránya $M = 1:10000$, akkor a vonalas hiba 10000 mm, vagyis 10 m. Ez pl. telek - vagy országhatárok kijelölésénél egyáltalán nem mindegy. E kis példa alapján is belátható, hogy ügyelni kell, mikor alkalmazhatjuk a szokásos szerkesztést és leolvasást, mikor nem. Jobb a helyzet a számítógéppel készített rajzoknál, de ott is van vonalvastagság, vagyis van a leolvasásnak egy kisebb bizonytalansága. Ezért a

számítógéppel készített rajzról a géppel „olvasatjuk le” a méreteket, ahol ez lehetséges. Az általunk alkalmazott **Graph** szoftver is lehetővé teszi ezt, bár nem minden esetben.

M16. Azt gondoljuk, hogy a fentiek akár középiskolások számára is hasznosak lehetnek. Az [1] írás tanulmányozása többeknél csak évek múlva – egyetemi tanulmányaik során – lesz esedékes. Kár lenne kihagyni. Már csak azért is, mert megvilágosító élmény lehet érettebb gondolkodással újra átvenni a középiskolai tananyag egyes részeit, figyelve a továbbhaladás módjára is.

***) Ajánlott olvasmány:**

<https://galgoczi.net/anyagok/Ujra%20az%20ellipszis%20egyenleteirol.pdf>

Forrás:

[1] – <http://www.astronomie-und-internet.de/docs/eigeneDokumente/HimmelsmechanikSS2005.pdf>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2022. 09. 05.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>